

虧格

國中組數學科第三名

台北市立和平國民中學

作者：陳 綽、陳建彰

廖昱善

指導教師：李和淑

一、研究動機

學期末了時，老師鼓勵我們利用暑假時間，多做數學方面的課外閱讀，增廣見聞。暑假中接觸到了許多耐人尋味的數學題目，尤其對虧格問題特別有興趣，便引發了研究動機。

二、研究目的

探討一邊長為 n 的正方形，其中任意處缺一格，則 n 在何種條件下，可用若干個“虧格”填滿？

三、研究過程

先由實驗得知邊長為 2^1 ， 2^2 ， 2^3 的正方形均可由數個虧格填滿，然後證明邊長為 2^n 的正方形成立，繼而推廣到邊長為 3^n ， 4^n ， 5^n ，……等情形，最後歸納證明出邊長為 n 的正方形， n 在何時成立？何時不成立？又從正方形再推廣至長方形。

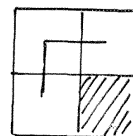
四、研究內容

我們將  的圖形稱之為“虧格”。

(一)由實際操作中，似乎可以發現一個規律：邊長為 2，4，8 的正方形，也就是 2^1 ， 2^2 ， 2^3 的圖形，都可以用若干的虧格填滿，那

麼邊長為 2^n 時，是否可用數個虧格填滿？

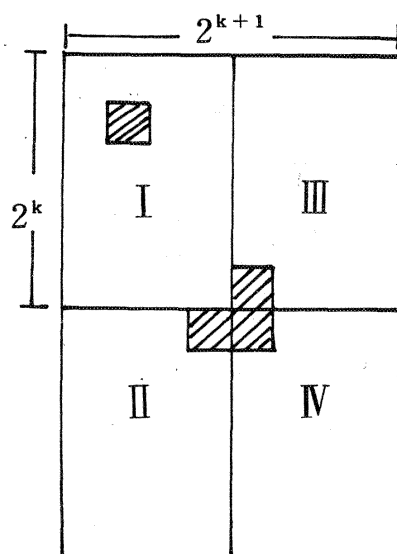
1. 當邊長為 2^1 時，即 $n = 1$ 時成立。如右圖：



2. 設 $n = k$ 時，原題成立。

則當 $n = k + 1$ 時，以縱橫二線平分此一正方形

形為四個邊長為 2^k 的正方形（Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ）。設所空的一格在Ⅰ中，則以一虧格置於中心Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ區（如下），即使Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ皆為一個邊長為 2^k 的正方形，且其內各缺一格，



$\therefore n = k$ 時成立，即邊長為 2^k 時成立， $\therefore$ Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ均可以數個虧格不重覆填滿，則此正方形可以數個虧格填滿。當邊長為 2^{k+1} 時缺格在Ⅰ中原題成立，其它若缺空在Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ區，同理可證。

3. 由數學歸納法知原題得證。

(二) 若邊長為 3^n 時，缺一格共有 $(3^n)^2 - 1 = 3^{2n} - 1$ 格，非 3 的倍數，但每一虧格是由 3 個小格組成的， $\therefore$ 邊長為 3^n 時，不能以數個虧格填滿，故不成立。

(三) 當邊長為 4^n 時，即 $(2^2)^n = 2^{2n}$ 為邊長時。 $\therefore$ 當邊長為 $2^{n'}$ 時（ n, n' 皆為任意正整數）成立， $\therefore$ 邊長為 $2^{2n} = 4^n$ 亦成立。

(四) 邊長為 5^n 時：

1. $n = 1$ 時，即邊長是 5 的正方形，由實際操作，可得知當缺格在偶數行或偶數列時，無法以虧格不重覆填滿，而缺格在奇數

行且奇數列時，可以數個虧格不重覆填滿。

2. $n > 1$ 時，留在(八)討論。

(五)邊長為 6^n 時，共有 $(6^n)^2 - 1 = 6^{2n} - 1$ 格，非 3 的倍數， $\therefore$ 知當邊長為 6^n 時，無法以數個虧格填滿。

(六)邊長為 7^n 時，亦可用數學歸納法證出可成立。

(七)邊長為 8^n 時，即 $(2^3)^n = 2^{3n}$ 格為邊長。 $\therefore 2^{n'}$ 時成立 (n, n' 皆為任意正整數) 成立， $\therefore 2^{3n} = 8^n$ 亦成立。

(八)經由一連串的實驗，我們找到了規律：

1. 邊長是 3 的倍數時，即不能成立。

$\therefore$ 設邊長是 $3n$ ，則此正方形缺一格後剩 $(3n)^2 - 1 = 3^2 n^2 - 1$ 格 $= 3(3n^2) - 1$ 格，非 3 的倍數， $\therefore$ 不能由虧格填滿。

2. 邊長非 3 的倍數 (5 除外)，均可成立。

證明：

我們設邊長 $n = 3a + 1$ 或 $3a' + 2$ ($a \geq 1; a' > 1$)

(1) $n = 3a' + 2$ 時：

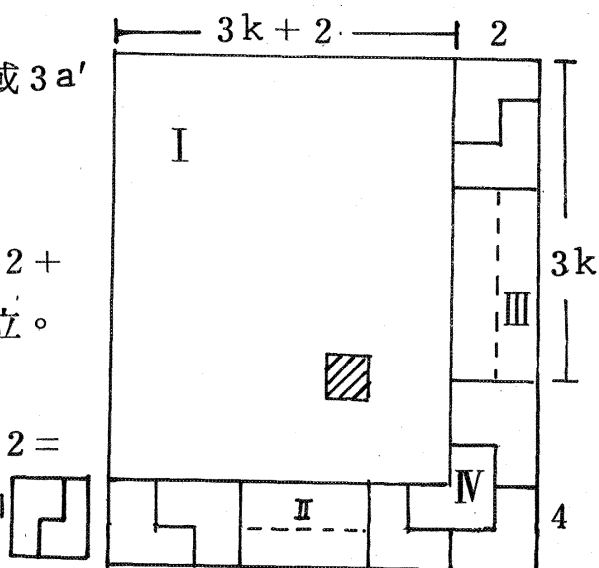
$\hookrightarrow$ 當 $a' = 2$ 時， $n = 3 \times 2 + 2 = 8$ 由(七)知原題成立。

$\hookrightarrow$ 設 $n = 3k + 2$ 時成立

則當 $n = (3k + 2) + 2 =$

$3k + 4$ 時，將 2 虧格如

排列使邊長為 $3 \cdot 2$ 。



將 k 個  圍於邊長為 $3k + 2$ 的正方形外 (如上圖)

，將 II、III 區填滿，再以 4 個虧格填入 IV 區，而缺空處在 I，由假設成立。

$\therefore$ I、II、III、IV 區均成立即邊長為 $3k + 4$ 時成立。

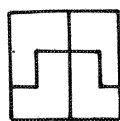
$\square$ 由數學歸納法知原題成立。

(2) 當 $n = 3a + 1$ 時：

$\hookrightarrow a = 1$ 時， $n = 3 \times 1 + 1 = 4$ 成立。

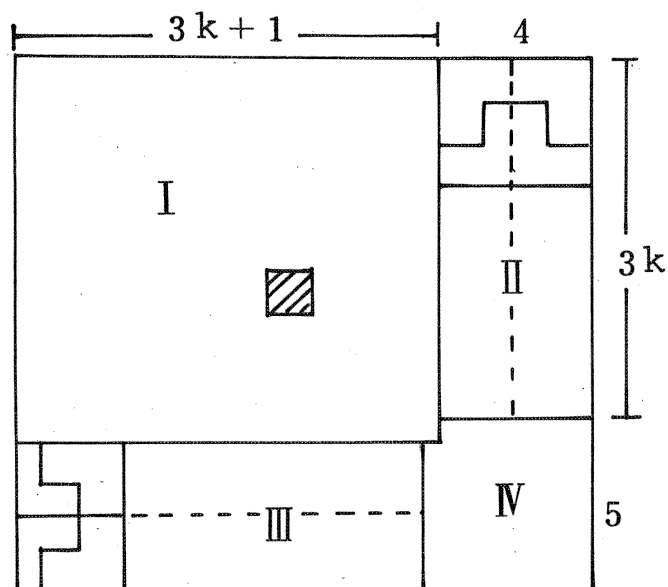
又設 $n = 3k + 1$ 時成立。

則當 $n = (3k + 1) + 4 = 3k + 5$ 時，將 4 虧格排成



環於 $3k + 1$ 為邊長的正方形外（如下圖），使之

將 II、III 區填滿，又 I 為邊長 $3k + 1$ 的正方形缺一格，可被若干個虧格不重覆填滿，IV 可視為邊長為 5，缺空處在左上角之正方形，而此一正方形亦可由數個虧格填滿。



∴ I、II、III、IV 區均成立，即邊長為 $3k + 5$ 時成立。

□ 由數學歸納法知原題成立。

(3) 以上當邊長為 n 的正方形，其中缺一格，其餘可用若干虧格不重覆填滿。

$$\begin{array}{ccccccc} (3 \times 1 + 1) & (3 \times 2 + 2) & (3 \times 3 + 1) & (3 \times 4 + 2) & & & \\ +4 & +2 & +4 & +2 & & & \\ 4 \text{ 成立} & \rightarrow 8 \text{ 成立} & \rightarrow 10 \text{ 成立} & \rightarrow 14 \text{ 成立} & \rightarrow 16 \dots\dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (3 \times 2 + 1) & (3 \times 3 + 2) & (3 \times 4 + 1) & (3 \times 5 + 2) & & & \\ +4 & +2 & +4 & +2 & & & \\ 7 \text{ 成立} & \rightarrow 11 \text{ 成立} & \rightarrow 13 \text{ 成立} & \rightarrow 17 \text{ 成立} & \rightarrow 19 \dots\dots \end{array}$$

即 $n = 3a + 1$ 和 $3a' + 2$ 二者互證。

五、推廣應用

以上是正方形的情形，至於長方形又可分為： $3m \times n$ ； $(3m +$

$1) \cdot (3n+1); (3m+1) \cdot (3n+2); (3m+2) \cdot (3n+1);$
 $(3m+2) \cdot (3n+2)$ 等五種來討論。

當邊長 $3m \times n$ 時，共有 $3mn-1$ 格，非 3 的倍數，故不成立。

當邊長 $(3m+1) \cdot (3n+2)$ 時，共有 $(3m+1)(3n+2)-1 = 9mn+6m+3n+1$ 格，非 3 的倍數也不成立。

當邊長 $(3m+2) \cdot (3n+1)$ 時，共有 $(3m+2)(3n+1)-1 = 9mn+6n+3m+1$ 格，非 3 的倍數也不成立。

其餘的我們分下列幾種來討論：

(一) 邊長為 $4 \times (3n+1)$ 的基本型。其中 $n > 1$ 。

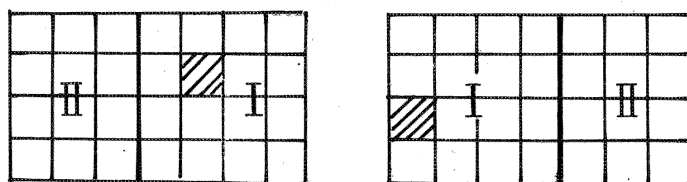
(二) 邊長為 $7 \times (3n+1)$ 的基本型。其中 $n > 1$ 。

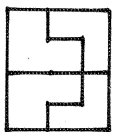
(三) 邊長為 $(3m+1) \cdot (3n+1)$ ，其中 m, n 均大於 2，的一般型
 及邊長為 $(3m+2) \cdot (3n+2)$ ，其中 m, n 均大於 1，的一般型。

(四) 邊長為 $5 \times (3n+2); n > 1$ 的特殊型。

(一) 邊長為 $4 \times (3n+1); n > 1$ 的基本型：

1. $n = 2$ 時，為 4×7 的長方形，分為 4×4 的正方形 (I) 和
 4×3 的長方形 (II)，如下圖，而缺空處在 (I)，(I) 成立。



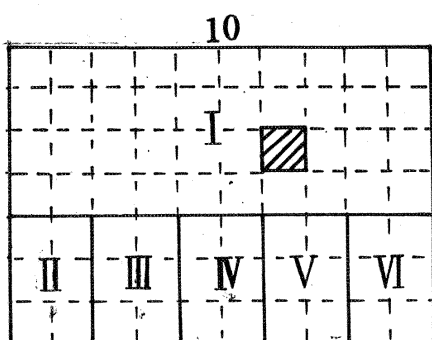
而 (II) 亦可以  的方式填滿，故 4×7 的長方形成立。

2. $n > 2$ 時， n 每加 1，便向兩旁加一個 (II) 的形式，又 (I) 的位置可向左右移動，在 (I) 中，不論缺空處在那，均可填滿之。

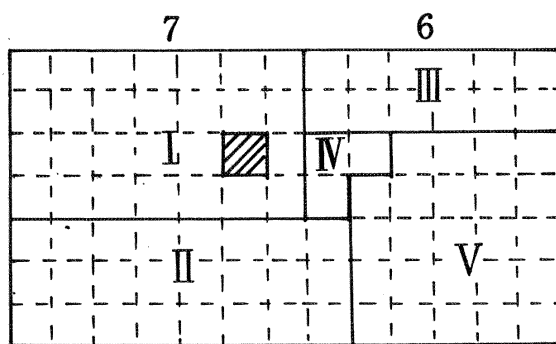
$\therefore$ 邊長為 $4 \times (3n+1)$ 的基本型成立。

(二) 邊長為 $7 \times (3n+1)$ 的基本型。 $n > 2$ ：

1. $n = 3$ ，為 7×10 的長方形：(I) 是 4×10 的長方形，缺空處在 (I)，由 (一) 知可成立。II、III、……VI 均為 2×3 的長方形成立，故此成立。若缺空處不在 I，將此長方形旋轉 180° ，即得所求。

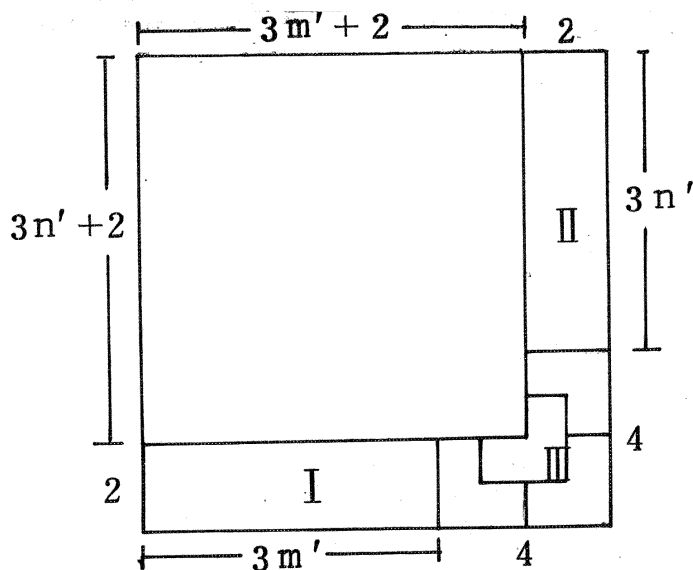


圖(a)

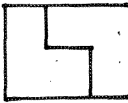


圖(b)

2. $n = 4$ ，為 7×13 的長方形：如上圖(b)劃分為 5 區，由(一)知當缺空處在 I 中成立。II、III、IV、V 亦可填滿，故成立。
 3. n 是大於 3 的奇數時：可參照上圖(a)的圖形，向左或向右增加若干個 7×6 的長方形，分割法如圖(a)的方式，必可將長方形以虧格填滿。
 4. n 是大於 4 的偶數時：可參照上圖(b)，向左增加若干個 7×6 的長方形，分割法如圖(b)III、IV、V 不變，I、II 可加長，若缺空處不在 I 可將圖形上下或左右倒轉，使缺空處必在 I 內，如此必可以虧格填滿。
 5. 由以上知邊長為 $7 \times (3n+1)$ ； $n > 2$ 的基本型成立。
- (三) $(3m+1) \cdot (3n+1)$ ； m, n 均大於 2 的一般型及 $(3m+2) \cdot (3n+2)$ ； m, n 均大於 1 的一般型：
1. 邊長用 $(3m+1) \cdot (3n+1)$ ； $m > 2$ ， $n > 2$ 的長方形：
- 如下圖：向內退 2 格，形成長為 $3m+1-2=3m'+2$ 寬為 $3n$

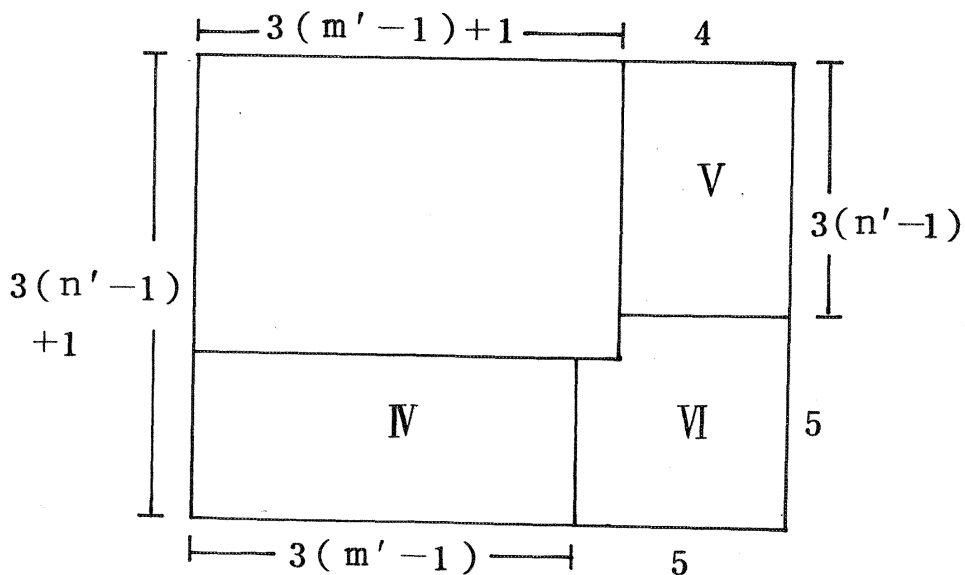


$+1-2=3n'+2$ 的長方形，和一寬為 2，長為 $3m+1$ ， $3n+1$ 的 L 形，再將此 L 形分割為 I、II、III 三部分。I 為寬 2，

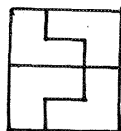
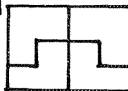
長 $3m'$ 的長方形，可由 m' 個  填滿。II 為寬 2，長

$3n'$ 的長方形，可由 n' 個  填滿。III 亦可由 4 個虧格填滿。則此 L 形成立。

2. 邊長為 $(3m'+2) \cdot (3n'+2)$ ； $m > 1$ ， $n > 1$ 的長方形：即上圖去掉 L 形之後的長方形，又可分割為長 $(3m'+2)-4=3(m'-1)+1$ ；寬 $(3n'+2)-4=3(n'-1)+1$ 的長方形，和寬 4，長 $3m'+2$ ， $3n'+2$ 的 L 形，如下圖。



又此 L 形可分成 IV、V、VI 等三部分。IV 為寬 4，長 $3(m'-1)$

的長方形，可用 $(m'-1)$ 個  填滿。V 為寬 4，長 $3(n'-1)$ 的長方形，可用 $(n'-1)$ 個  填滿。

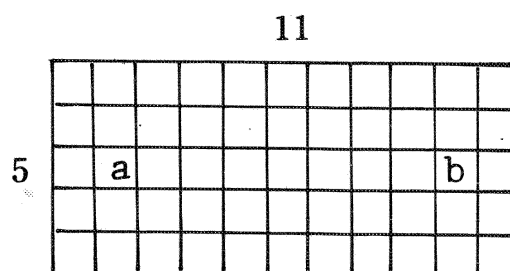
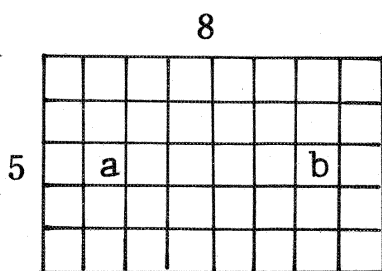
VI 可視為 5×5 的正方形，其左上角缺一格，亦可填滿，故此 L 形可成立。

如此 $(3a+1) \cdot (3b+1) \rightarrow (3a'+2) \cdot (3b'+2) \rightarrow (3a''+1) \cdot (3b''+1) \dots$ 的一直循環下去，直到基本的：

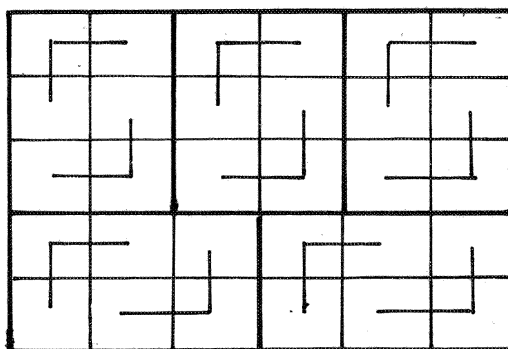
$4 \times (3n+1)$ 或 $7 \times (3n'+1)$ 的形式，因此我們可以很輕易的用這個方法來解決任意矩形虧格填覆的問題，但要注意的是：缺空處永遠要在長方形內，而非 L 形內。

(四) 邊長為 $5 \times (3n+2)$; $n > 1$ 的長方形：

1. 由實驗得知 5×8 的長方形，及 5×11 的長方形，當缺空處在下圖中的 a 或 b 時，不能以虧格填滿，而缺空處在除 a , b 的任何位置，均可以虧格填滿。



2. 當邊長 $5 \times (3n+2)$; n 是大於 2 的偶數時，可看成 5×8 的長方形，向左或向右多數個 5×6 的長方形。若 n 是大於 2 的奇數時，可看成 5×11 的長方形，向左或向右多數個 5×6 的長方形。而 5×6 的長方形可如下圖，以 10 個虧格填滿。



3. $\therefore$ 邊長為 $5 \times (3n+2)$; $n > 1$ 的長方形當缺空處在第三列的首或末第二行的位置時，不能以虧格填滿，其餘的均可成立。

六、結 論

(一) 一邊長為 n 格的正方形，其中任意處缺一格時：

1. n 是 3 的倍數時，不能以若干虧格填滿。
2. $n = 5$ 時，若缺格在偶數列或偶數行時，不能以虧格填滿。

若缺格在奇數列且奇數行時，可成立。

3. $n \neq 5$ ，且 n 非 3 的倍數時，不論缺空處在那，均可以數個虧格不重覆填滿。

(二) 邊長為 $m \times n$ 的長方形，其中缺一格：

1. m 或 n 是 3 的倍數時，不能以虧格填滿。

2. $m = 3a + 1$ ， $n = 3b + 2$ 或 $m = 3a + 2$ ， $n = 3b + 1$ (a ， b 為正整數) 時，不能以虧格填滿。

3. $m = 3a + 1$ ， $n = 3b + 1$ ($a \geq 1$ ， $b \geq 1$) 及 $m = 3a + 2$ ， $n = 3b + 2$ ($a > 1$ ， $b > 1$) 時，不論缺空處在那，均可以虧格填滿。

4. $m = 5$ ， $n = 3b + 2$ ($b > 1$) 時，若缺空處在第三列的首、末算起第二行的位置時，不能以虧格填滿，除此二格外，缺的格在任何位置均可以虧格填滿。

七、參考資料

高級中學基礎數學第一冊。

評 語

作者對於虧格填圖之討論相當完整，值得鼓勵。